

微分方程数值解第一周作业

傅长青 13300180003

2017 年 3 月 6 日

1 $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ 在零点附近的计算误差

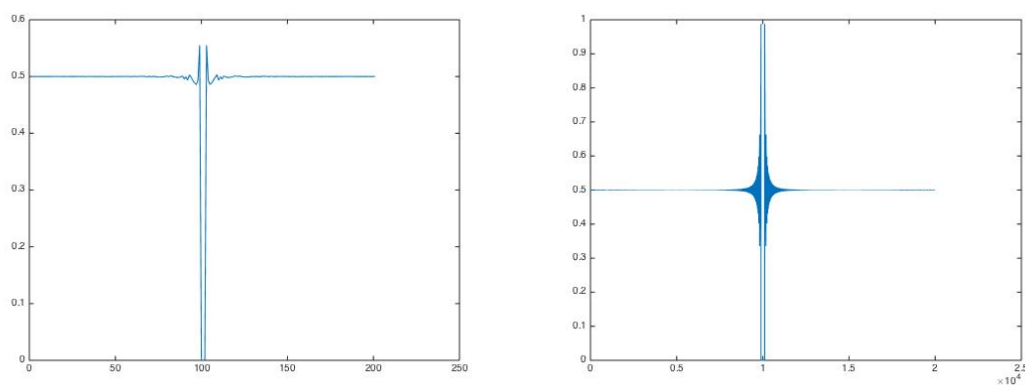


图 1: 计算误差, 步长分别为 10^{-8} 和 10^{-10}

分析: $\frac{0}{0}$ 型的极限, 理论上 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 但由于存在机器误差, 所以数值计算时不稳定

2 $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ 正向和反向迭代的初始扰动分析

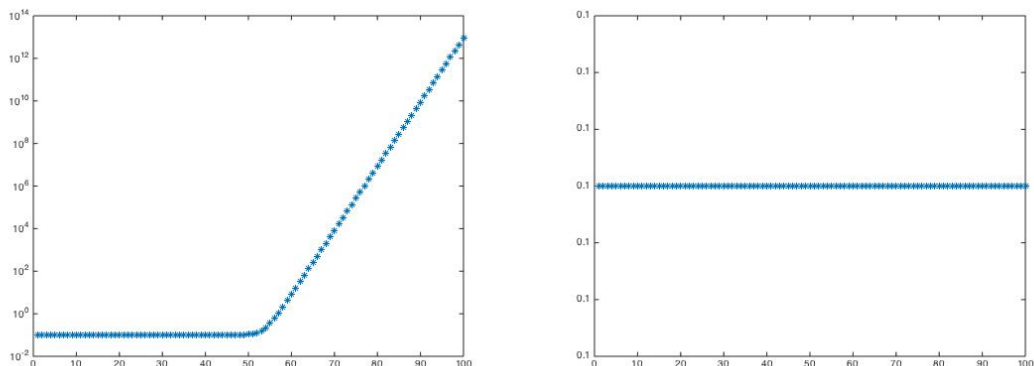


图 2: 正向和反向迭代的误差, 其中 $x_1 = x_2 = 0.1$, 迭代 100 步

分析: 正向迭代时误差发散, 反向收敛。设机器误差 $0.3 - 0.2 - 0.1 = a_0$, 则正向误差 $e_n = 2^{n-2}a_0 (n \geq 2)$, 反向误差为 $e_n = a_0/2, a_0/2, 0, 0, a_0/2, a_0/2, 0, 0, \dots (n \geq 2)$ (循环)

3 不动点迭代公式

已知

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \alpha \|x_{n+1} - x_n\|,$$

则

$$\|x^* - x_n\| \leq \sum_{k \geq 0} \|x_{k+n+1} - x_{k+n}\| = \sum_{k \geq 0} \alpha^{k+n} \|x_1 - x_0\| = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|$$