微分方程数值解第十一周作业

傅长青　　13300180003

2017 年 5 月 18 日

1　求解 $\Omega = [-1, 1]^2$ 上的问题 $-\Delta u + u = f, u|_{\partial\Omega} = 1$

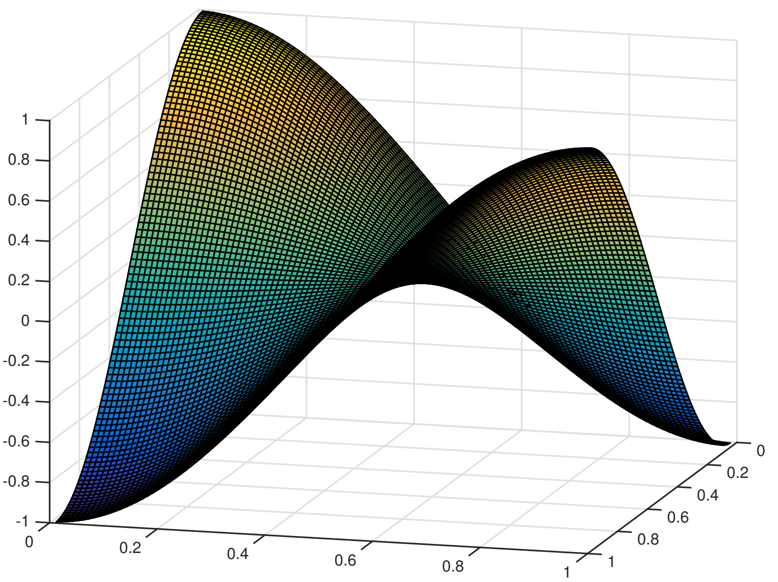
设离散形式 $\mathcal{L}_h u = (\mathrm{A} + \mathrm{I})u = f$ 观察可知, 矩阵 $\mathrm{A} + \mathrm{I}$ 为严格正定 TST 矩阵.

条件 1. *精确解为* $u(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 1$

解. 由条件知

$$f = (1 + 8\pi^2)\sin(2\pi x)\sin 2\pi y)$$

用五点格式数值解如图, 取 100×100 个点,$l2$ 范数下误差为 0.0162. □

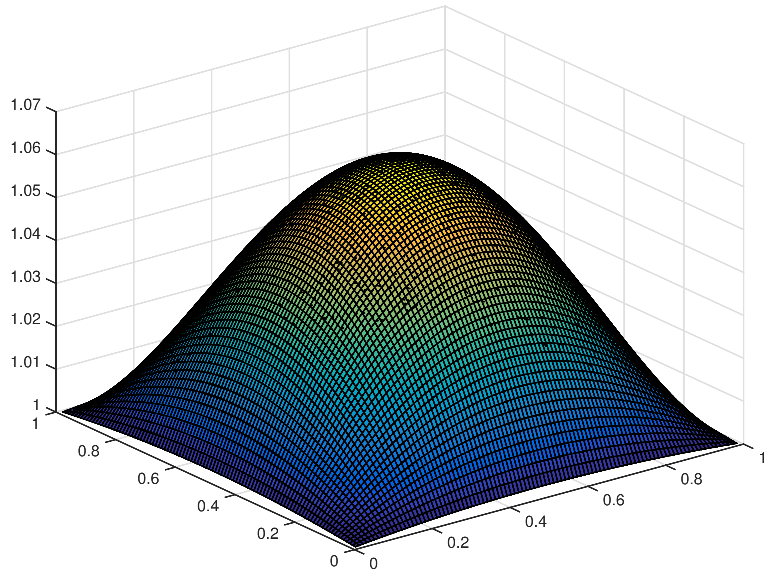


条件 2. *精确解为* $u(x, y) = x(1 - x)y(1 - y) + 1$

解. 由条件知

$$f = 2y(1 - y) + 2x(1 - x) + x(1 - x)y(1 - y) + 1$$

用五点格式数值解如图, 取 100×100 个点,$l2$ 范数下误差为 5.0052e-12. □



命题 1. l^∞ 范数收敛

由极值原理 ($\mathcal{L}u > 0, c > 0$), 误差最大值只能在边界达到, 即数值格式稳定. 又由截断误差 R 二阶相容, 得到 l^∞ 模下二阶收敛. 数值模拟如下:

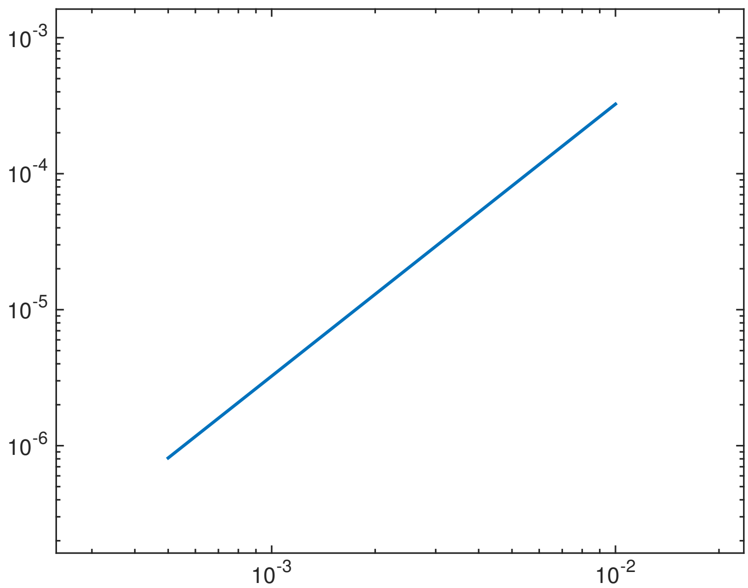


图 1: l^∞norm-stepsize

命题 2. l^2 范数收敛

区域内部的计算格式 l^2 意义下一阶收敛.

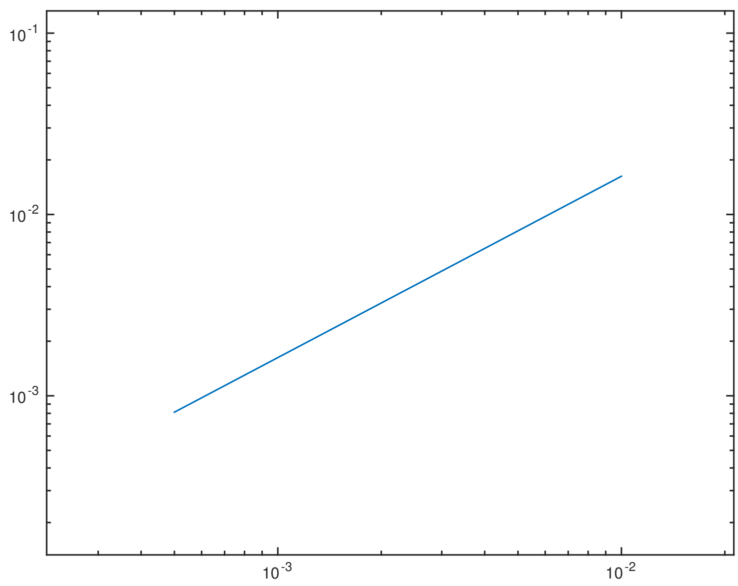


图 2: l^2norm-stepsize

```
function [U X Y err]=Ch3_fd2d(n,W,f)
%solve -u''+u=f in \Omega, u=1 on boundary
if(nargin<1)
n=100;
h=1/n;
end
if(nargin<2)
I=speye(n-1);
e=ones(n-1,1);
D=spdiags([-e 2*e -e],-1:1,n-1,n-1);
A=(kron(I,D)+kron(D,I))/h^2+speye((n-1)^2);%2d span on 1d
end
if(nargin<3)
f=@(x, y) (1 + 8*pi^2) .* sin(2*pi*x) .* sin(2*pi*y)+1;
%f=@(x,y) 2.*y.*(1-y)+2.*x.*(1-x)+x.*(1-x).*y.*(1-y)+1;
end

h=1/n;
x=(1:1:(n-1))/n;
[X Y]=meshgrid(x);%2d domain
F = f(X,Y);
F([1 end],:)=F([1 end],:)+1/h^2;
F(:,[1 end])=F(:,[1 end])+1/h^2;
F = F(:);%2d span on 1d

```

```
uf = A\F;%solution
U = reshape(uf,n-1,n-1);%2d solution

%% plot
u0=@(x, y) sin(2*pi*x) .* sin(2*pi * y)+1;
%u0=@(x, y) x.*(1-x).*y.*(1-y)+1;
U0=u0(X,Y);
surf(X,Y,U);
hold on;
surf(X,Y,U0);

%err=max(U0(:)-U(:))
err=norm(U0-U)
end
```