微分方程数值解第二周作业

傅长青　　13300180003

2017 年 3 月 6 日

1　$F(x) = e^{-x}$ 不动点迭代和 Newton-Rapson 迭代的比较

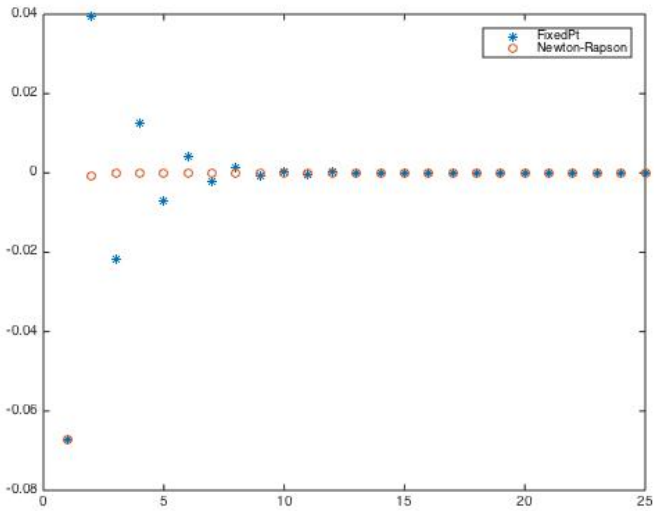

图 1: 误差，其中 $x_0 = 0.5$，迭代 24 步，精确值用 solve 函数给出

分析：不动点迭代法 24 步误差为：

-0.067143290409784 0.039387369302849 -0.021904078517179 0.012559804468284 -0.007078662470882 0.004028858567431 -0.002280343429460 0.001294757160282 -0.000733837662863 0.000416343852458 -0.000236077474313 0.000133905560995 -0.000075938556056 0.000043069677854 -0.000024426152798 0.000013853297861 -0.000007856750511 0.000004455920841 -0.000002527139977 0.000001433252293 -0.000000812858839 0.000000461007624 -0.000000261457321 0.000000148283784 -0.000000084098147 ...

而牛顿法的误差为

-0.067143290409784 -0.000832287212566 -0.000000125374922 -0.000000000000003 -0.000000000000000 ...

因为牛顿法是二阶收敛的，而不动点法 1 阶收敛。

2 p-范数等价于 q-范数

设 $1 \le p \le q < \infty$，

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \cdot 1\right)^{1/p} \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^p)^{q/p}\right)^{p/q} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 1^{1/(1-p/q)}\right)^{1-p/q}\right)^{1/p} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\mathbf{x}\|_q.$$

所以，

$$\|\mathbf{x}\|_q \le \|\mathbf{x}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_q$$