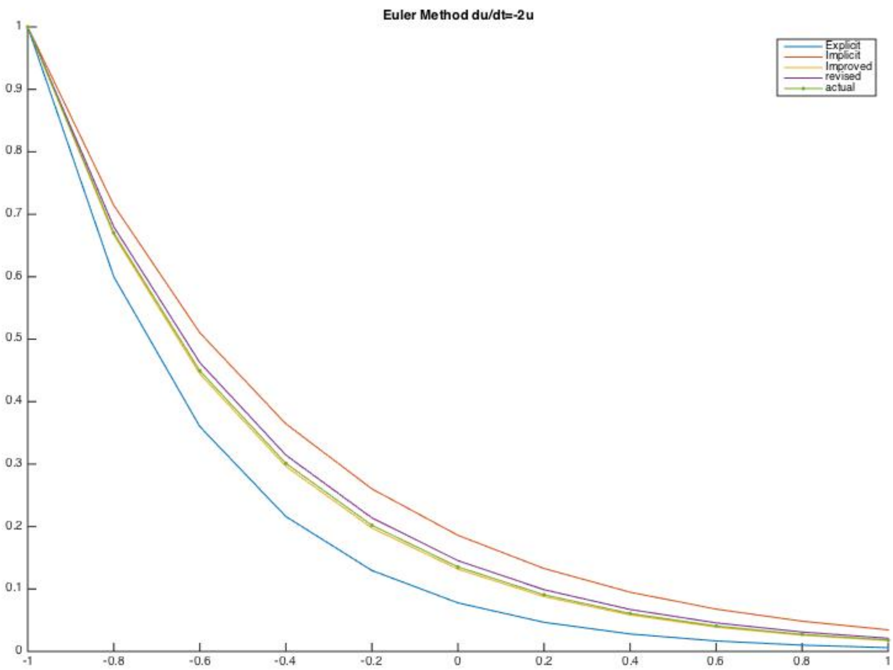
微分方程数值解第四周作业

傅长青　　13300180003

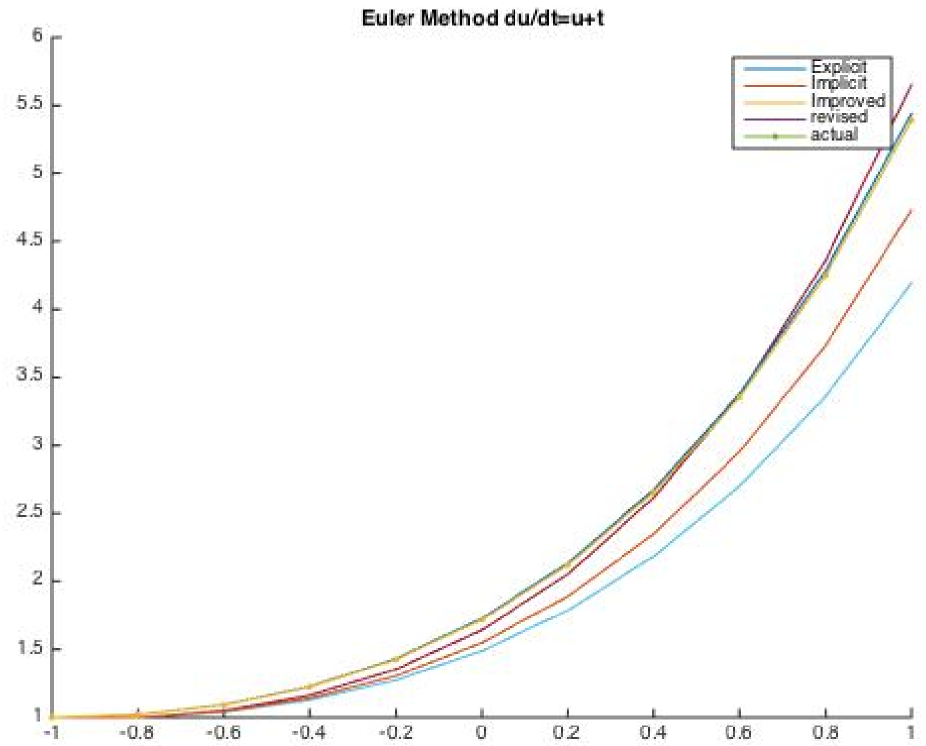
2017 年 3 月 31 日

1　不同迭代方法的比较，$\frac{du}{dt} = 2u$



对于标准测试方程，改进的欧拉方法最接近真实值。图中参数为 $t_0 = 1 < t < t_1 = 1, u_0 = 1, \Delta t = 0.2$

参数不变，进一步测试非自治方程 $\frac{du}{dt} = u + t$，结果如下：



仍然是改进的欧拉方法误差最小，其次是修正、隐式、显式方法。

2 隐式欧拉算法的收敛性

设 f 的 Lipschitz 常数为 L，$\|u''\| \le M$，

$$\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\le |u_{n+1} - u_n - \Delta t f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))| \\
&\le |u_{n+1} - u(t_n) - \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1})| + |u(t_n) - u_n| + \Delta t L |u(t_{n+1}) - u_{n+1}| \\
&\le |R_{n+1}| + |e_n| + \Delta t L |e_{n+1}|
\end{aligned}$$

$\because |R_n| \le C_1 \Delta t^2$
$\therefore |e_n| \le e^{LT}|e_0| + \frac{C}{L}(e^{LT} - 1)\Delta t$，即误差关于步长是一阶的。