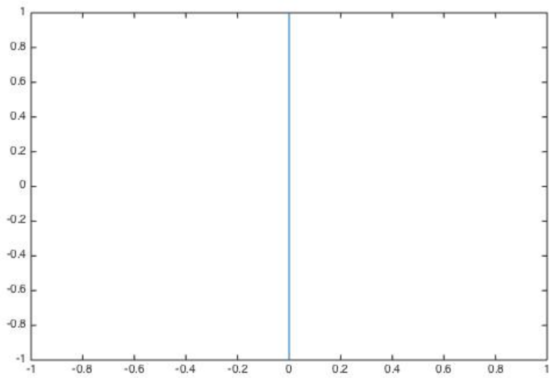
微分方程数值解第五周作业

傅长青　　13300180003

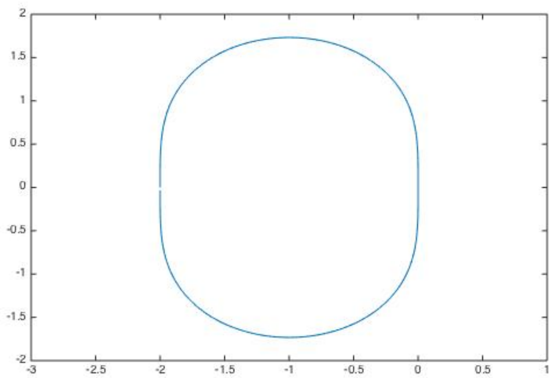
2017 年 4 月 5 日

1　修正和改进 Euler 方法的绝对稳定区域

设 f 关于 u 的 Lipschitz 常数为 L，$z = u\Delta t$，改进欧拉算法满足 $x_{n+1} < \frac{1+z/2}{1-z/2}x_n$，稳定区域为 $z < 0$，即 y 轴左边

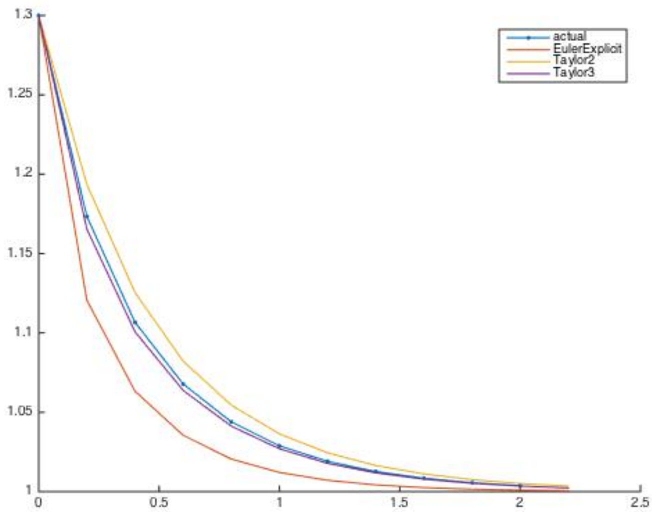


修正欧拉算法满足 $x_{n+1} < \frac{1+z/2}{1-z/2}x_n$，稳定区域为 $|1 + z + z^2/2| < 1$，即下图围成的区域。



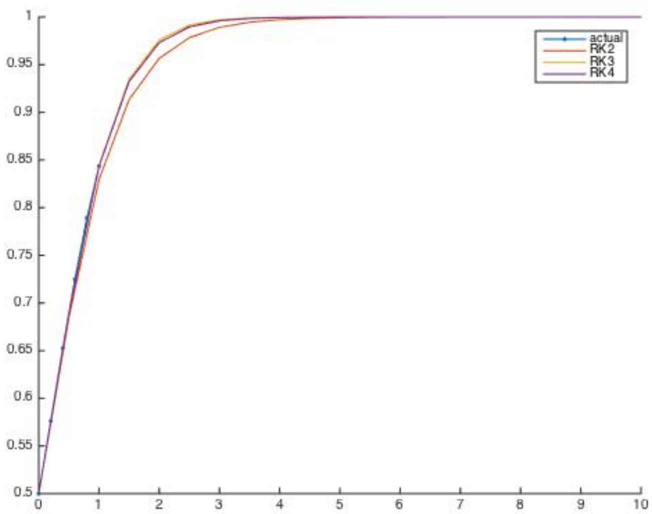
2 taylor 方法和 Euler 显示方法的比较

测试方程 $f(t,u) = u - u^3$，计算参数 $t_0 = 0; u_0 = 1.3; dt = 1/5; T = 2$（步长设置的大一些便于观察）:



3 Runge Kutta 方法的收敛阶

测试方程 $f(t,u) = u - u^3$，以 2 阶为例，$t_0 = 0; u_0 = 0.5; dt = .5; T = 10$



设 $t_0 = 0; u_0 = 0.8; dt = 2^{-i}; T = 10$ 收敛阶如下图:

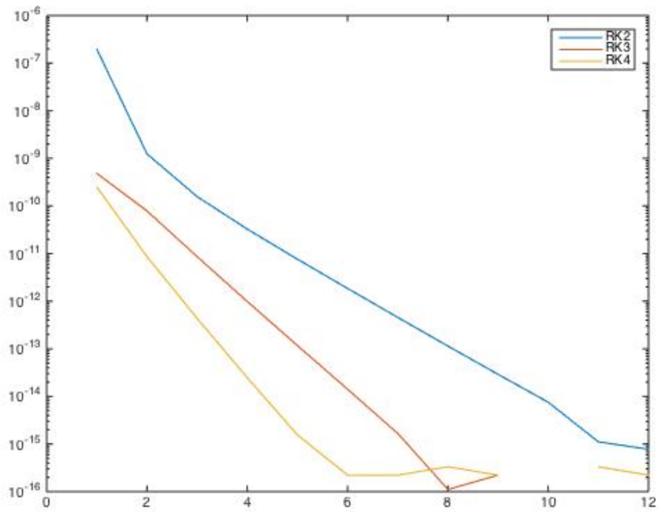


图 1: 步长 $\Delta t = 2^{-i}$

观察斜率可以验证精度为 2，3，4 阶。缺失处为达到机器精度。