微分方程数值解第七周作业

傅长青　　13300180003

2017 年 4 月 22 日

1　P93 1 用 Newton 表示（∇）重写 Adams 格式

1.1　Adams 内插（隐式）

$$u_{n+1} - u_n = \int_{t_{n+1}}^{t_n} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

设步长为 h，用牛顿表示写出由 $t_{n+1}, \ldots, t_{n-k+1}$ 插值 f 得到的 k 次 Lagrange 多项式：

$$p_{n+1,k}(x_{n+1} + \tau h) = f_{n+1} + \frac{\tau}{1!}\nabla f_{n+1} + \frac{\tau(\tau+1)}{2!}\nabla^2 f_{n+1} + \cdots \tag{2}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \begin{pmatrix} -\tau+1 \\ j \end{pmatrix} \nabla^j f_{n+1} \tag{3}$$

代入1，得到

$$\nabla u_{n+1} = h \sum_{j=0}^{k-1} c_j \nabla^j f_{n+1} \tag{4}$$

其中系数

$$c_j = \int_{-1}^{0} (-1)^j \begin{pmatrix} -\tau+1 \\ j \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \tag{5}$$

1.2　Adams 外插（显式）

同样由1，由 $t_n, \ldots, t_{n-k}$ 插值 f 得到 k 次 Lagrange 多项式，

$$p_{n,k}(x_n + \tau h) = f_n + \frac{\tau}{1!}\nabla f_n + \frac{\tau(\tau+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots \tag{6}$$

$$= \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j \begin{pmatrix} -\tau+1 \\ j \end{pmatrix} \nabla^j f_n \tag{7}$$

代入1，同理可得

$$\nabla u_{n+1} = h \sum_{j=0}^{k-1} c_j \nabla^j f_n \tag{8}$$

其中系数

$$c_j = \int_0^1 (-1)^j \begin{pmatrix} -\tau + 1 \\ j \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \tag{9}$$

2 P118 解方程 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda(-u + \cos t)$

2.1 精确解

同乘积分因子 λe^t，化为

$$\frac{\mathrm{d}ue^{\lambda t}}{\mathrm{d}t} = \lambda \cos t \tag{10}$$

积分并代入初值，解得

$$u(t) = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}(\lambda \cos t + \sin t) + \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} u(0) e^{-\lambda t} \tag{11}$$

2.2 $\lambda = 10^i, i = 0, 1, 2, 3$ 的解

2.2.1 $u_0 = 0, \Delta t = 0.01, t \in [0, 1]$

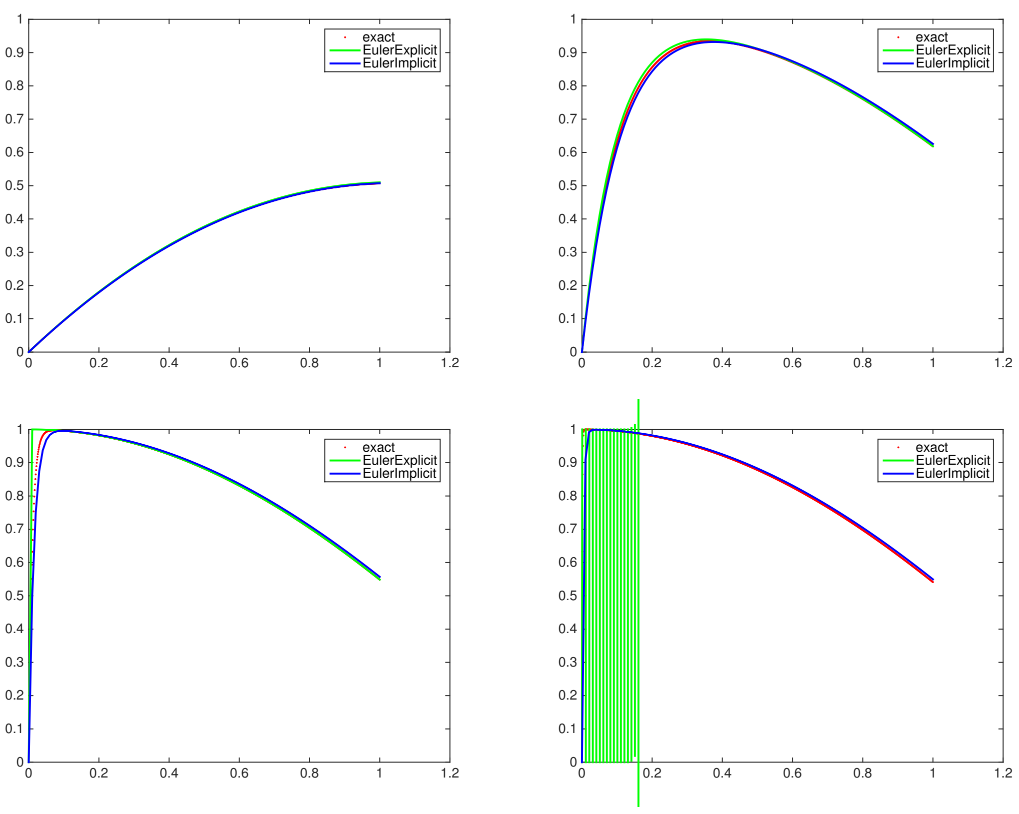

图 1: $\lambda = 10^{0,1,2,3}$

取如图2所示，显式 Euler 格式在 λ 较大，即 f 变动剧烈的时候对步长要求很高，从而不收敛；而隐式 Euler 算法是 A-稳定的，总是收敛。

2.2.2 $u_0 = 0, \Delta t = 0.1, t \in [0, 10]$

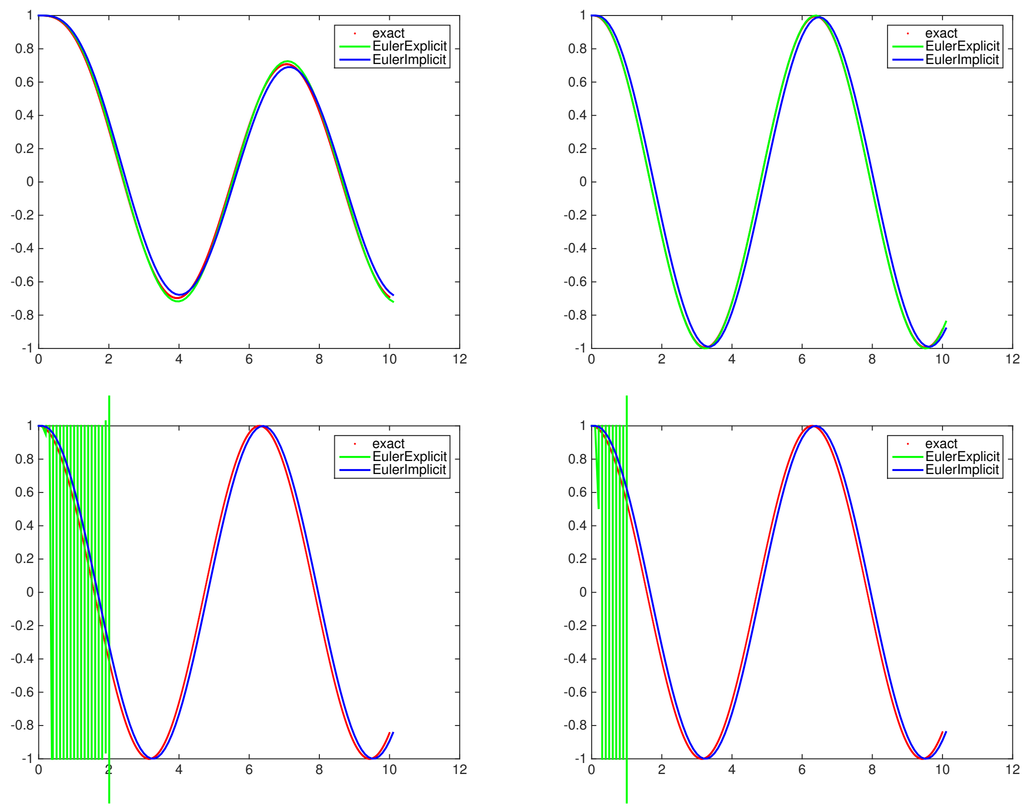

图 2: $\lambda = 10^{0,1,2,3}$

如图所示，当步长放大 10 倍时，$\lambda = 100$ 已经使计算格式发散。

2.3 Adams 方法和 Gear 方法算 $\lambda = 1000$

2.3.1 $u_0 = 1, \Delta t = 0.1, t \in [0, 10]$

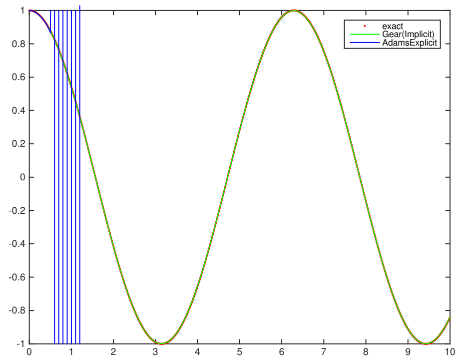

图 3: 四阶 Adams 和 Gear 方法计算结果

Adams（显式）格式不收敛，Gear（隐式）格式收敛。

2.3.2 $\lambda = 10, u_0 = 1, \Delta t = 0.1, t \in [0, 10]$

全局误差（$t = 10$ 处）随步长的变化

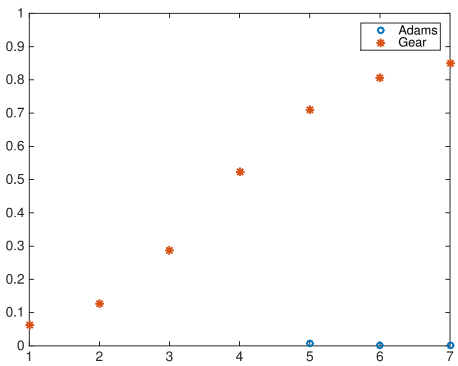

图 4: 步长 $\Delta t = 2^{-i}$

观察图可知，$\Delta t \leq 2^{-5}$ 时 Adams 格式开始收敛；Gear 格式始终收敛，但是随误差步长递增

Notes for this chapter

- 二阶常微分方程边值问题的解析解

$$-au_{xx} + bu_x + cu - 1 = 0 \tag{12}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{13}$$

- 极值原理 定义算子 $\mathcal{L}u = -au_{xx} + bu_x + cu, u|_{\partial\Omega} = 0$，则极值在边界取到。(Krein–Milman theorem (Wikipedia)) 推论：比较原理（扰动下的稳定性 <-）。

- （能量模意义下）的稳定性：应用Lax-Milgram Theorem (Wikipedia)，定义二阶线性算子 $\mathcal{L}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y$ (要求 $a, c - 1/2b'$ bounded away from 0，用Poincaré inequality (Wikipedia)) (Krein–Milman theorem (Wikipedia))

  $H_0^1(\Omega)$(Sobolev space (Wikipedia))，半模（最高阶导数的模）