微分方程数值解第八周作业

傅长青　　13300180003

2017 年 4 月 29 日

1　补充：$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x), u(0)=0, u'(1)=0$（第二类 Neumann 边界条件），证明解可以表示为 Green 函数的积分

由 Riesz 表示定理，微分算子可以显式的写作由积分核 G 表示的积分形式。下面求导两次验证：

设

$$G(x;x_0)=\begin{cases} x & x<x_0 \\ x_0 & x\geq x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x;x_0)f(x_0)\,\mathrm{d}x && (1)\\ &= \int_0^x x_0 f(x_0)\,\mathrm{d}x_0 + \int_x^1 xf(x_0)\,\mathrm{d}x && (2)\\ u'(x) &= xf(x)-xf(x)+\int_x^1 f(x_0)\,\mathrm{d}x_0 && (3)\\ &= \int_x^1 f(x_0)\,\mathrm{d}x_0 && (4)\\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} &= -f(x) && (5)\\ u'(1) &= -f(1)=-u(1) && (6) \end{aligned}$$

(1) 确实表示原方程的解。

2　P136 1 一维 Helmholtz 方程解不满足极值原理（$c(x)<0$）

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+k^2u=1, u(0)=u(1)=0 \tag{7}$$

解： 通解：

$$u(x)=C_1\cos kx+C_2\sin kx+\frac{1}{k^2} \tag{8}$$

代入边值条件得：

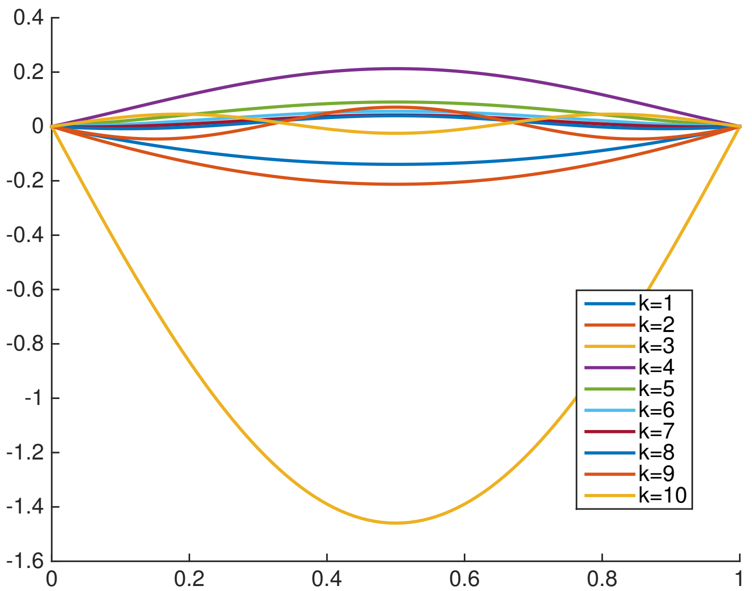
$$u(x) = -\frac{1}{k^2}\cos kx + \frac{\cos k - 1}{k^2 \sin k}\sin kx + \frac{1}{k^2} \tag{9}$$

求导得到：

$$u'(x) = \frac{1}{k}\sin kx + \frac{\cos k - 1}{k \sin k}\cos kx \tag{10}$$

$$u''(x) = \cos kx - \frac{\cos k - 1}{\sin k}\sin kx \tag{11}$$

例如 $k = 1$ 时，令 $u' = 0$ 解得 $x = 0.5$，$u''(0.5) < 0$ 最小值在 $x = 0.5$ 处取到。$k = 1, 2, \ldots, 10$ 的解如图所示。



3 P143 3 $-au_{xx} + bu_x + cu = f, u(0) = 0, u'(1) + u(1) = 0$（第三类 Robin 边界条件）求精确解，并用三点格式求解，分析差分格式的精度

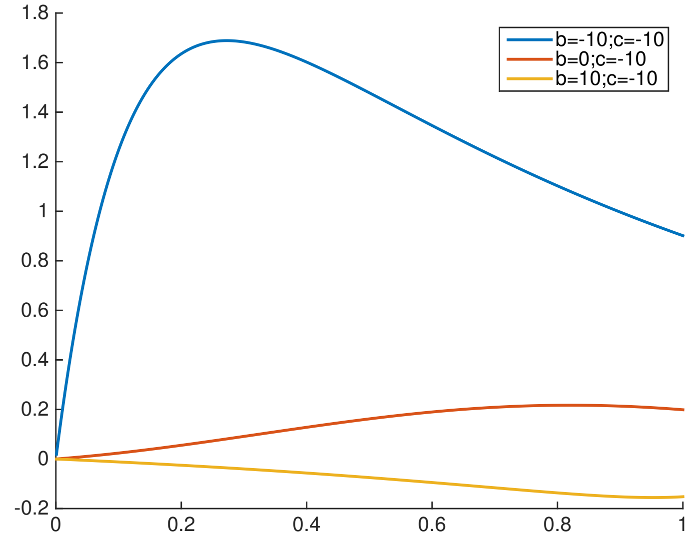
解： 先求精确解：通解为

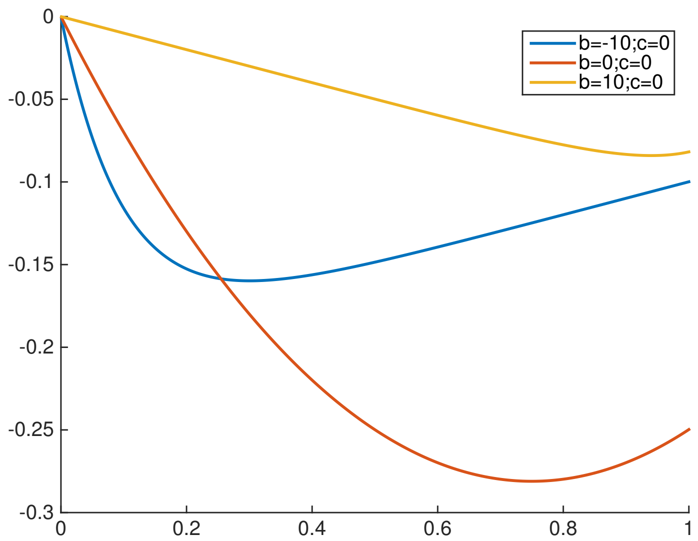
$$u(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{c} \tag{12}$$

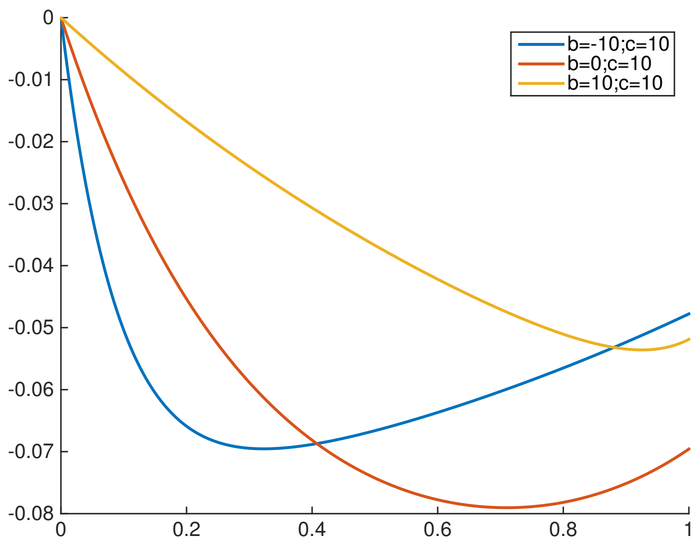
代入边值条件得：

$$u(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (\lambda_1 + 1)e^{\lambda_1} & (\lambda_2 + 1)e^{\lambda_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} \end{pmatrix} - \frac{1}{c} \tag{13}$$

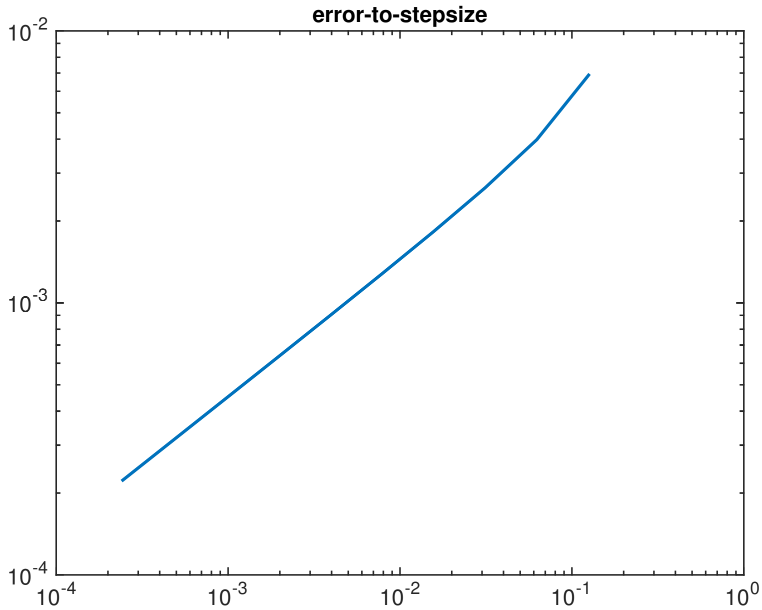
采取最简单的向后差分法（一阶精度）处理 $x = 1$ 处的边值，图像如下：


b=-10;c=-10
b=0;c=-10
b=10;c=-10
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


b=-10;c=0
b=0;c=0
b=10;c=0
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


b=-10;c=10
b=0;c=10
b=10;c=10
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
-0.06
-0.07
-0.08
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

步长取 2^{-i}，测试方程取 $b=c=10$，2-范数下的误差-步长图为:



观察图像可以看到，算法具有一阶精度。