微分方程数值解第九周作业

傅长青　　13300180003

2017 年 5 月 17 日

1　证明离散 Poincaré 不等式, 以此证明 $c(x) \equiv 0$ 时,$-u'' = f(x), u(0) = u(1) = 0$ 的收敛性, 证明三点差分格式函数值和导数值都是二阶收敛的

解: 设 $\delta_+ u_i = u_{i+1} - u_i$, 由 Schwartz 不等式, 利用条件 $u_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
\|u\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{n}(u_0 + \sum_{i=0}^{k}(\delta_+ u_i))^2 \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} k(\sum_{i=0}^{k}|\delta_+ u_i|^2) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}|\delta_+ u_k|^2 \\
&= \|\delta_+ u\|_2^2
\end{aligned}$$

这就证明了离散情形的 Poincaré 不等式.

设离散化的 Sturm-Liouville 算子为 $\mathcal{L}_h$, (系数 $a = 1, b = c = 0$), 对应矩阵 $\mathbf{A}$,$e\mathcal{L}_h e = -\sum_{i=1}^{n-1} e_i \delta^2 e_i = e^\top \mathbf{A} e \geqslant 0$, 所以 $\mathbf{A}$ 正定. 设误差 $e_i = u(x_i) - u_i$, 局部截断误差 (二阶离散 Δu 的余项)$R_i = \mathcal{L}_h u(x_i) - f(x_i)$, 则有 $\mathcal{L}_h e_i = \mathcal{L}_h u(x_i) - \mathcal{L}_h u_i = R_i + f_i - f_i = R_i$.$(f(x_i) = f_i)$

$$\begin{aligned}
\because \quad & \sum_{i=0}^{n-1} -e_i \delta^2 e_i = \sum_{i=0}^{n-1} R_i e_i \leqslant \|R\|_2 \|e\|_2 \\
& \text{i.e.} \quad \|\delta_+ e\|_2^2 \leqslant \|R\|_2 \|\delta_+ e\|_2 \\
\therefore \quad & \|e\|_2^2 \leqslant \|\delta_+ e\|_2 \leqslant \|R\|_2
\end{aligned}$$

$\because R$ 二阶收敛, $\therefore e$ 和 $\delta_+ e$ 二阶收敛.

2　P151 3 变系数的三点差分格式的极值原理

证明当 $a(x) \geqslant \alpha > 0$ 不是常数时，对应问题 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}) = f$ 三点差分格式的极值原理仍然成立, 并给出三点差分格式的最大模误差估计.

解: 变系数的三点差分格式 (半步长) 写作

$$-\frac{1}{h^2}\left(a(x_{i+\frac{1}{2}})u_{i+1}-(a(x_{i+\frac{1}{2}})+a(x_{i-\frac{1}{2}}))u_i+a(x_{i-\frac{1}{2}})u_{i-1}\right)=f$$

定理 1 (离散极值原理)**.** 上述三点差分格式中, 若 $u_0=u_n=0,\forall i,f_i\geqslant 0;\exists i,s.t.f_i>0$, 则 u_i 的最小值只能在端点处取得.

证明. 存在内点 x_i 使 u 取到最小值. 不失一般性, 设 $i=\min\operatorname{argmin}_k u(x_k)$,
(1) 若 $i\geqslant 2$, 则 $\mathcal{L}_h u_i<0$, 差分格式恒小于 0
(2) 若 $i=1$, $j:=\max\operatorname{argmin}_k u(x_k)<n-1$, 差分格式恒小于 0
(3) 若 $i=1$, $j=n$ 则 $u\equiv 0$
得到矛盾.
注: 这里的 $a(x_{i+\frac{1}{2}})$ 也可以换为 x 向后 $(a(x_{i+1}))$ 或向前 $(a(x_i))$ 格式 □

定理 2 (误差估计)**.** $e_0=e_N=0$, 且 e_i 满足误差方程 $-\delta x^2 e_i=R_i,1\leqslant i\leqslant n-1$, 如果 u 和 a 满足

$$|12u^{(4)}+6a'u^{(3)}+8a''u''+24a^{(3)}u'|\leqslant M$$

则 $|R_i|\leqslant Mh^2$

证明. 构造 (Normalize x with respect to weight a):

$$v_i=-h\sum_{j=1}^{i-1}\frac{x_j-C}{a(x_{j+\frac{1}{2}})}$$

其中

$$C=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i}{a(x_{i+1/2})}}{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a(x_{i+1/2})}}$$

v_i 满足性质

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h v_i&=-\frac{1}{h^2}\left(a(x_{i+1/2})h\frac{x_i-C}{a(x_{i+1/2})}-a(x_{i-1/2})h\frac{x_{i-1}-C}{a(x_{i-1/2})}\right)\\&=-\frac{1}{h}(x_i-x_{i-1})=1\end{aligned}$$

由极值原理,$v_i>0,1\leqslant i\leqslant N-1$, 因此 $|e_i|\leqslant v_i\|R\|_\infty$

由于 $0\leqslant C\leqslant 1$, 从而对 v_i 有估计

$$|v_i|\leqslant h\sum_{j=1}i-1\frac{x_j+C}{\alpha}\leqslant\frac{1}{\alpha}\left(\frac{i(i-1)}{n^2}+\frac{C(i-1)}{n^2}\right)\leqslant\frac{2}{\alpha}$$

因此有误差估计 $|e_i|\leqslant v_i\|R_i\|_\infty=2Mh^2$ □